L'exercice suivant I.8 propose d'étudier le même problème d'orthogonalisation, mais dans le cadre d'un groupe abélien fini.

Exercice I.8 (Orthogonalisation sur un groupe abélien). Cet exercice est inspiré de l'article de BERNARDINI et KOVACEVIC [7]. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'un produit hermitien $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Soit G un groupe abélien fini de transformations unitaires de V, et soit $b \in V$. On dit que b est orthonormé pour l'action de G sur V si l'ensemble $G_b \overset{\text{déf.}}{=} \{Ab \setminus A \in G\}$ est orthonormé. Ceci signifie que

$$\forall (x,y) \in G_b^2, \quad \langle x, y \rangle = \delta_x^y.$$

1. On note

$$\psi_b : \begin{cases} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A & \longmapsto & \langle Ab, b \rangle \end{cases}.$$

Montrer que b est orthonormé pour l'action de G si et seulement si $\widehat{\psi_b} \equiv 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\forall \chi \in \widehat{G}$, $|G| \left\langle \mathscr{U}_\chi b, b \right\rangle = 1$, où l'on a noté

$$\forall \chi \in \widehat{G}, \quad \mathscr{U}_\chi \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \chi(A) A \quad \in \mathscr{L}(V,V).$$

2. Montrer que les opérateurs $\mathscr{U}_\chi$ sont des projecteurs orthogonaux, et qu'ils sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire

$$\forall (\chi_1, \chi_2) \in \widehat{G}^2, \quad \mathscr{U}_{\chi_1} \mathscr{U}_{\chi_2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \chi_1 \neq \chi_2 \\ \mathscr{U}_{\chi_1} & \text{si} \quad \chi_1 = \chi_2 \end{cases},$$

et $\mathscr{U}_\chi^* = \mathscr{U}_\chi$ (A^* désigne l'adjoint de A).

3. On suppose que $\widehat{\psi_b}$ ne s'annule pas. On note

$$\widetilde{b} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \frac{1}{\sqrt{\widehat{\psi_b}(\chi)}} \mathscr{U}_\chi b,$$

où $\sqrt{\widehat{\psi_b}(\chi)}$ désigne l'une des deux racines possibles. Montrer que $\widetilde{b}$ est orthonormé pour l'action de G.

4. Quel rapprochement peut-on faire avec l'exercice I.7 ?

Correction de l'exercice I.8 :

1. Le fait que b soit orthonormé est équivalent au fait que $\psi_b = \delta_e$, où e est l'élément neutre de G. En prenant les transformées de Fourier des deux membres, on trouve $\widehat{\psi_b} = \widehat{\delta_e} = \mathbf{1}$, où on a noté $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\widehat{\psi_b} = |G| \left\langle \mathscr{U}_\chi b, b \right\rangle$

2. Il s'agit de montrer trois choses :
   (i) l'orthogonalité de $\mathscr{U}_{\chi_1}$ et $\mathscr{U}_{\chi_2}$.
   (ii) l'idempotence de $\mathscr{U}_{\chi_1}$.
   (iii) que $\mathscr{U}_{\chi_1}$ est auto-adjoint.

   Montrons (i) :

$$\begin{aligned} \mathscr{U}_{\chi_1} \mathscr{U}_{\chi_2} &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{(U,V) \in G^2} UV \chi_1(U) \chi_2(V) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{(U,R) \in G^2} R \chi_1(U) \overline{\chi_2(U)} \chi_2(R) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{U \in G} \chi_1(U) \overline{\chi_2(U)} \sum_{R \in G} R \chi_2(R) = \delta_{\chi_1}^{\chi_2} \mathscr{U}_{\chi_2}. \end{aligned}$$

   Pour la deuxième égalité, on a utilisé le changement de variable $R = UV$, et pour la dernière égalité, on a utilisé l'orthogonalité des caractères χ_1 et χ_2.

   Pour montrer (ii), le calcul est identique, il suffit de prendre $\mathscr{U}_{\chi_1} = \mathscr{U}_{\chi_2}$.
   Le fait que $\mathscr{U}_{\chi_1}$ soit auto-adjoint est immédiat :

$$\left(\mathscr{U}_{\chi_1}\right)^* = \sum_{U \in G} U^* \overline{\chi_1(U)} = \sum_{U \in G} U^{-1} \chi_1(U^{-1}) = \mathscr{U}_{\chi_1}.$$

   Pour la dernière égalité, on a simplement utilisé le fait que $U \mapsto U^{-1}$ était une permutation sur l'indice de sommation.

3. Pour montrer l'orthogonalité de $\widetilde{b}$, il faut mener le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{b}, \mathscr{U}_\chi(\widetilde{b}) \right\rangle &= \left\langle \sum_{\tau \in \widehat{G}} \mathscr{U}_\tau b \frac{1}{\sqrt{\Phi(\tau)}}, \sum_{\tau \in \widehat{G}} \mathscr{U}_\tau \mathscr{U}_\chi b \frac{1}{\sqrt{\Phi(\tau)}} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathscr{U}_\chi b \frac{1}{\sqrt{\Phi(\chi)}}, \mathscr{U}_\chi \mathscr{U}_\chi b \frac{1}{\sqrt{\Phi(\chi)}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\Phi(\chi)} \left\langle \mathscr{U}_\chi b, \mathscr{U}_\chi b \right\rangle = \frac{1}{\Phi(\chi)} \left\langle b, \mathscr{U}_\chi b \right\rangle = 1. \end{aligned}$$

   Pour la deuxième égalité, on a développé les sommes, et on a utilisé les relations d'orthogonalité entre les $\mathscr{U}_\tau$ démontrées à la question précédente. Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\mathscr{U}_\chi$ est auto-adjoint.

4. L'exercice I.7 se place dans le cas continu et utilise le groupe $\mathbb{R}$ agissant de façon unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$ par translation. Il s'agit aussi d'une méthode d'orthogonalisation dans le domaine de Fourier.